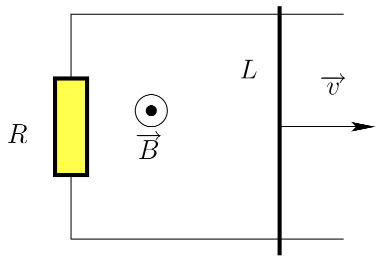
Induction électromagnétique

1. Barre sur deux rails horizontaux

On déplace une barre (AB), de longueur L, à la vitesse $\overrightarrow{v}$ sur deux rails horizontaux. La résistance électrique de la barre et des rails est négligeable devant la résistance R introduite dans le circuit. L'ensemble est placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan des rails.



Calculer l'intensité dans le circuit et établir un bilan énergétique.

2. Barre conductrice suspendue à deux ressorts verticaux

Une barre conductrice de masse m et de longueur a est suspendue à deux ressorts verticaux, de raideur k et de coefficient d'auto-induction (supposé constant) L (Cf. fig. 1).

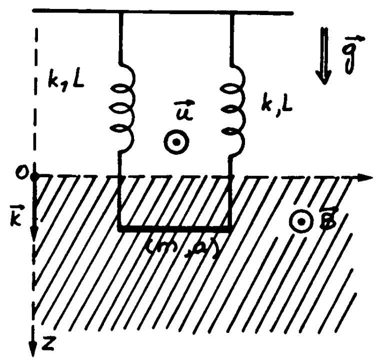


FIG. 1 –

1. Déterminer l'équation du mouvement de la barre lorsqu'elle demeure dans l'espace des z positifs où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B.\overrightarrow{u}$.
   Aide : Déterminer la $f.e.m$ induite, puis appliquer la loi fondamentale de la dynamique.
2. A l'instant initial $t = 0$, la barre est tirée vers le bas de $z(0) = d$ par rapport à sa position d'équilibre, puis lâchée avec une vitesse initiale nulle.
   Déterminer $z(t)$ et $i(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.
3. Faire un bilan énergétique.

3. Induction dans un solénoïde infini

Soit un solénoïde infini, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur. Il est parcouru par un courant alternatif dont l'intensité est $I = I_0 cos\omega t$.

1. Calculer le potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde. En déduire le champ électromoteur à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.
2. En déduire la force électromotrice e induite dans une spire circulaire de rayon r intérieure ou extérieure au solénoïde et de même axe.
3. Retrouver son expression à partir de la loi de Faraday.

4. Freinage par courants induits

Une spire circulaire homogène conductrice de masse M, de rayon a, de moment d'inertie $J = M.a^2$, de résistance R d'inductance négligeable, est suspendue à un fil isolant vertical OC qui n'oppose aucune résistance à la torsion. La spire est fermée sur elle-même.

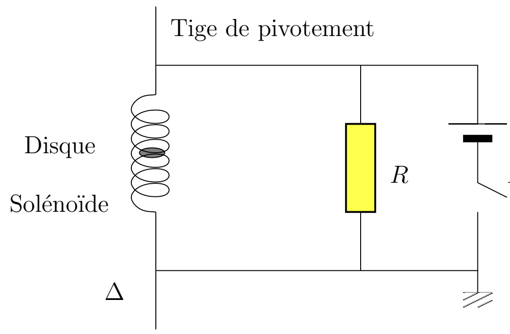
Un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, horizontal, uniforme, existe dans toute la région où peut se mouvoir la spire. On désigne par α l'angle que fait la normale à la spire avec $\overrightarrow{B}$.

Pour $t = 0$, $\alpha = 0$ et la spire est lancée à la vitesse angulaire $\dot{\alpha}_0$ autour de OC.

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement.
2. Chercher la relation liant $\dot{\alpha}$ et α. Montrer que, sans connaître α en fonction du temps, on peut déterminer à partir de B, a, M, R et $\dot{\alpha}_0$ la valeur finale α_f prise par α lorsque la spire s'arrête.
3. Montrer graphiquement qu'il n'y a qu'une solution pour α_f. Déterminer B pour $\alpha_f = \dfrac{\pi}{2}$, $M = 2$ g, $\dot{\alpha}_0 = 2\pi$, $R = 4.10^{-2}\Omega$, $a = 5$ cm.
4. Calculer l'énergie totale dissipée par effet joule.

5. Moment cinétique d'un champ électromagnétique

Dans le modèle de Sommerfeld, le moment cinétique d'un électron par rapport au noyau est, pour un état donné, un multiple de $\hbar$. La transition entre deux niveaux entraîne a priori une variation de moment cinétique : celui-ci ne peut être conservé que si le photon possède aussi un moment cinétique, et c'est bien ce que confirment les règles de sélection. L'expérience étudiée ci-après montre, sur un exemple macroscopique, l'existence du moment cinétique d'un champ électromagnétique, donc des photons.



On considère un solénoïde d'axe Δ vertical, constitué de spires circulaires de surface S (n spires par unité de longueur), branché en parallèle avec un résistor de résistance R, un générateur muni d'un interrupteur K alimente l'ensemble (voir fig. 1).

On attache en son centre et perpendiculairement à une tige verticale, un disque homogène de masse m' et de rayon a. La tige peut pivoter sans frottement de pivotement. Elle sera considérée comme infiniment fine, coïncidant avec l'axe géométrique Δ du solénoïde (voir fig. 1).

Le disque, qui est isolant, porte sur sa circonférence une charge de densité linéique λ uniforme ; il plonge entièrement dans le solénoïde, c'est-à-dire qu'il se situe à l'intérieur de celui-ci et loin de ses extrémités, ce qui permettra de négliger les effets de bord (voir fig.). Quant au solénoïde, il ne porte aucune charge car il est relié électriquement à la terre.

Quand on ouvre l'interrupteur, le disque se met à tourner. Nous nous proposons d'étudier ce phénomène. A quoi l'attribueriez-vous ? Comment prévoir le sens de rotation du disque ?

Dans toute cette partie du problème, on fera l'Approximation des Régimes Quasi Permanents, en abrégé ARQP.

1. En fonction du courant I qui traverse le solénoïde, exprimer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ créé par celui-ci en négligeant les effets de bord (on pourra rappeler ce résultat sans démonstration) ; on se servira du repère des coordonnées cylindriques en choisissant $\overrightarrow{u_z}$ vertical vers le haut et O au centre du disque.

   En déduire son inductance propre L, sachant que sa longueur est ℓ.

   Calculer numériquement B et L si $n = 1$ spire/mm, $I = 5$ A, $\ell = 1$ m et si les spires ont un diamètre de 20 cm.

2. A l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur. Juste avant cette ouverture ($t = 0^-$), l'intensité du courant dans le solénoïde est i_0. Exprimer l'intensité $i(t)$ à l'instant $t > 0$, en considérant que la résistance du solénoïde est faible devant R.

   N.B : pour cette question et pour toute la suite du problème, on négligera - sauf avis contraire - le champ magnétique créé par les charges du disque (qui se met en rotation) devant le champ magnétique créé par le solénoïde.

   Y a-t-il discontinuité de l'intensité dans le solénoïde à l'instant $t = 0$? Dans le résistor ? Calculer numériquement un temps caractéristique de $i(t)$ si $R = 1$ kΩ.

3. On rappelle que, dans l'ARQP, la condition de jauge de Lorentz s'identifie avec celle de Coulomb et que, pour cette jauge, un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ (de même qu'un potentiel scalaire V) peut avoir les mêmes symétries planes et les mêmes symétries de révolution que la distribution de charges et de courants. En déduire ce potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$ créé par le solénoïde à l'intérieur de lui-même. Dessiner les lignes de champ de $\overrightarrow{A}$. Quel est le potentiel scalaire créé par le solénoïde ?

4. À partir du théorème du moment cinétique, déduire la vitesse angulaire de rotation du disque $\overrightarrow{\omega} = \omega(t).\overrightarrow{u_z}$ en considérant qu'il est immobile à $t = 0$. On l'exprimera en fonction de m', n, i_0, R, L, μ_0 et de la charge totale q du disque ; on pourra noter J le moment d'inertie du disque et de la tige par rapport à l'axe Δ.

   Calculer numériquement la vitesse angulaire w atteinte en régime permanent toujours pour $n = 1$ spire/mm, $i_0 = 5$ A, si on a réussi à fabriquer un disque très léger de masse $m' = 1$ g, et à y déposer par forte électrisation sous vide une charge de 1 mC.

5. On veut vérifier le bien-fondé de l'approximation, introduite au 2 -, selon laquelle le champ magnétique créé par les charges du disque en rotation est négligeable devant le champ créé par le solénoïde pour quasiment toute la période d'accélération du disque.

   Dans ce but, on note B' la norme du champ magnétique créé par le disque en son centre, et B la norme du champ créé par le solénoïde au même point. De plus, on considère la valeur de B' en régime permanent, que l'on note B'_∞ et celle de B à $t = 0^-$, que l'on note B_0.

   Exprimer le rapport $\dfrac{B'_\infty}{B_0}$ en fonction de m', μ_0, q et a. Montrer qu'il s'exprime très simplement en fonction du rapport $\dfrac{U}{m'c^2}$ où U est l'énergie électrostatique mutuelle du disque et d'une charge q placée en son centre, et $m'c^2$ l'énergie de masse du disque.

   Calculer numériquement $\dfrac{B'_\infty}{B_0}$ pour $q = 1$ mC, $m' = 1$ g, $a = 1$ cm.

   A partir de quel instant le rapport devient-il supérieur à 1 ? On exprimera cet instant en fonction de $\dfrac{L}{R}$.

Conclure.

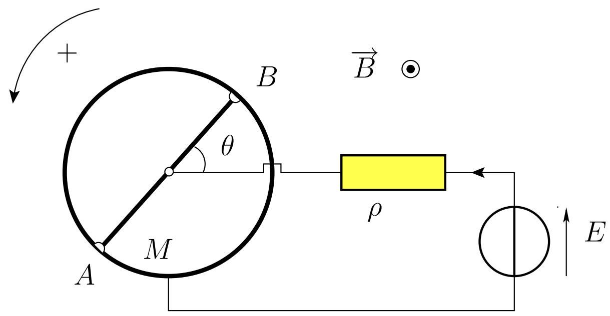
Cette expérience fournit une illustration de l'existence d'un moment cinétique, dans le champ électromagnétique régnant avant l'ouverture de l'interrupteur : sinon la conservation du moment cinétique d'un système isolé ne pourrait être une loi fondamentale de la physique !

Valeurs numériques de quelques constantes : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi.10^9}$ F.m^{-1}, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ N.A^{-2}.

6. Moteur

Un conducteur filiforme est constitué d'un cercle de rayon a. Un autre conducteur filiforme, rectiligne est disposé selon un diamètre, sans frottement autour de O. Le point O et un point fixe du cercle, M, sont reliés en série avec un générateur de force électromotrice E et une résistance R.

On suppose R très grand devant la résistance de tous les autres conducteurs du circuit. On repère la position de AB par l'angle θ. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ perpendiculaire au cercle.



1. Exprimer en fonction de l'intensité I du courant traversant R le moment par rapport à O des forces électromagnétiques appliquée au conducteur AB.
2. Calculer la force électromotrice induite le long de OA en fonction de B, a et de la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. En déduire une relation entre I et ω.
3. On désigne par Jle moment d'inertie de AB par rapport à un axe Oz perpendiculaire en O au plan de la figure.
   (a) Établir l'équation différentielle liant θ et t.
   (b) La barre est à l'arrêt en $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$. On applique la f.e.m., donner les expressions de ω et de θ en fonction du temps. On posera $\frac{4JR}{a^4B^2}$. Faire apparaître la vitesse angulaire limite ω_0 atteint par AB.
4. On désigne par t_1 l'instant où $\omega = \frac{\omega_0}{2}$. Exprimer, entre les instants $t = 0$ et $t = t_1$:
   (a) l'énergie fournie par le générateur.
   (b) l'énergie dissipée par effet Joule.
   (c) le travail des forces électromagnétiques.
   (d) Conclure.