

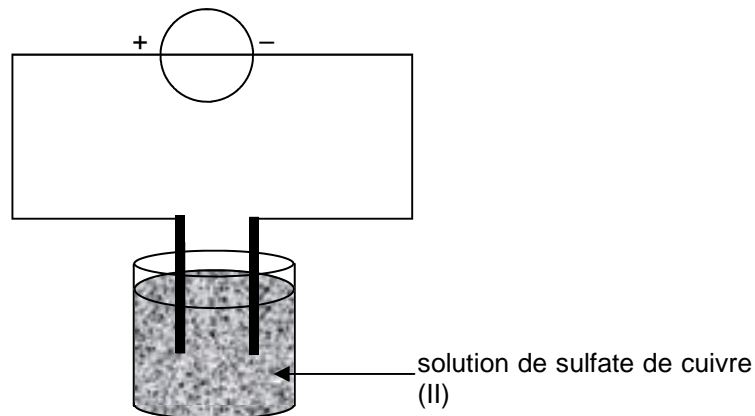
## MICHAEL FARADAY (1791 - 1867) (6,5 points)

### Première partie : le chimiste.



Chimiste et physicien britannique, Faraday débute sa carrière en étudiant le phénomène d'électrolyse ; il remarque que la quantité de matière produite à une électrode est proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse l'électrolyte. Il note aussi que la masse du dépôt engendré par un courant électrique est proportionnelle à la masse molaire atomique de l'élément déposé divisée par un nombre entier (1, 2, 3, 4).  
L'objectif de cette première partie est de retrouver ces résultats.

On réalise l'électrolyse d'une solution de sulfate de cuivre (II) ( $\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + \text{SO}_4^{2-}(\text{aq})$ ) entre deux électrodes inattaquables de carbone afin d'obtenir à l'une des électrodes un dépôt de cuivre.



1. Écrire l'équation de la réaction à l'électrode où se produit le dépôt de cuivre. S'agit-il d'une oxydation ou d'une réduction ?
2. Préciser le nom de l'électrode (anode ou cathode) où se produit ce dépôt ainsi, que le signe + ou - du pôle du générateur auquel elle est reliée.
3. Donner une relation entre la quantité de matière de cuivre déposée  $n_{\text{Cu}}$  au bout d'une durée  $\Delta t$  d'électrolyse et la quantité d'électrons (exprimée en mol)  $n_e$  ayant circulé dans le circuit.
4. Exprimer la quantité d'électrons (exprimée en mol)  $n_e$  en fonction de l'intensité  $I$  du courant d'électrolyse, la durée  $\Delta t$  de l'électrolyse, le nombre d'Avogadro  $N_A$  et la charge électrique élémentaire  $e$ .  
On pourra utiliser l'information suivante : le faraday ( $F$ ),  $1 F = N_A \cdot e$ .
5. Établir la relation entre la quantité de matière de cuivre déposée  $n_{\text{Cu}}$  au bout de  $\Delta t$  et l'intensité du courant  $I$  d'électrolyse ; montrer que l'affirmation : « la quantité de matière produite à une électrode est proportionnelle à l'intensité du courant qui traverse l'électrolyte » est vérifiée.
6. À partir de la relation précédente, exprimer la masse de cuivre  $m_{\text{Cu}}$  déposée au bout de  $\Delta t$  et montrer que la seconde affirmation « la masse du dépôt engendré par un courant électrique est proportionnelle à la masse molaire atomique de l'élément déposé, divisée par un petit nombre entier » est aussi vérifiée.  
Que vaut « le petit nombre entier » ?

## Seconde partie : le physicien.

*Faraday est surtout connu pour ses travaux sur l'électromagnétisme ; en 1831, il découvre l'induction électromagnétique ; ce phénomène, et plus particulièrement celui de l'auto-induction est à l'origine des propriétés des bobines étudiées en classe de terminale ; on se propose de retrouver certaines d'entre elles dans cette seconde partie.*

On réalise le circuit électrique représenté en annexe 1 ; il est constitué d'un générateur de tension constante de valeur  $E = 3,0 \text{ V}$ , de deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$ , d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 90 \Omega$ , d'un second conducteur ohmique de résistance  $r$ , d'une bobine de résistance  $r$  égale à celle du second conducteur ohmique et d'inductance  $L$ . Une interface reliée à un ordinateur permet de saisir les valeurs instantanées de la tension  $u_R$ .

Deux saisies sont successivement réalisées :

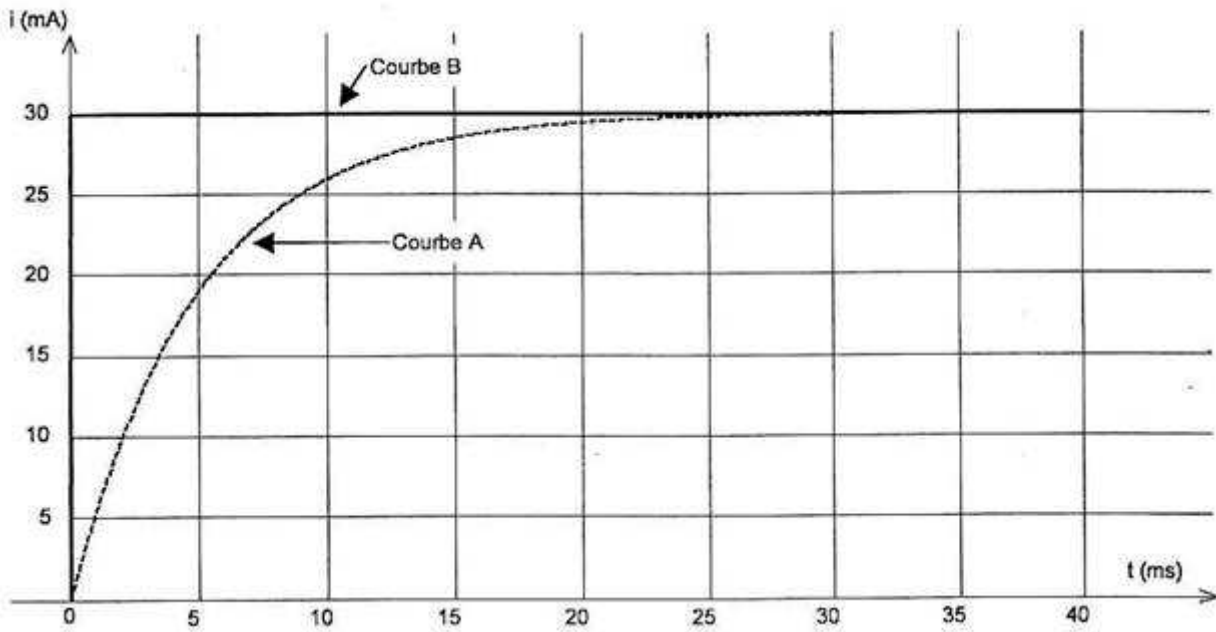
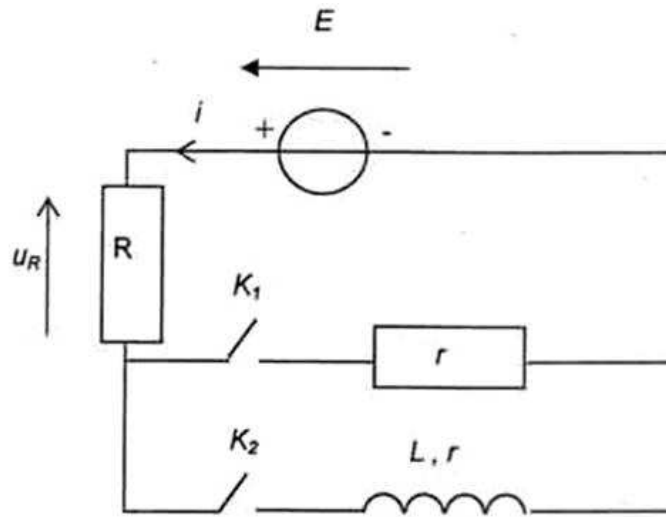
1<sup>ère</sup> saisie :  $K_2$  reste ouvert ; on ferme  $K_1$  ;

2<sup>ème</sup> saisie :  $K_1$  reste ouvert ; on ferme  $K_2$  .

On programme la feuille de calcul afin d'obtenir dans les deux cas, l'évolution de l'intensité  $i$  du courant en fonction du temps.

Les deux saisies fournissent les deux courbes figurant en annexe 2.

1. Quelle relation faut-il programmer pour obtenir  $i$ , intensité du courant en fonction du temps ?
2. Attribuer à chaque saisie la courbe correspondante. Justifier.
3. En utilisant la convention récepteur, représenter sur le circuit de **l'annexe 1 à rendre avec la copie** la flèche de la tension  $u_B$ , tension aux bornes de la bobine.
4. Donner l'expression littérale de la tension  $u_B$  en fonction de  $r$ ,  $L$ , et  $i$ .
5. Étude de la seconde saisie
  - 5.1. Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'intensité  $i$  du courant lorsqu'on ferme l'interrupteur  $K_2$ .
  - 5.2. En déduire l'expression littérale de l'intensité limite  $I$  du courant lorsque le régime permanent est établi. Déterminer graphiquement sa valeur sur l'annexe 2, puis calculer  $r$ .
  - 5.3. Inductance de la bobine
    - 5.3.1. Donner l'expression littérale de la constante de temps  $\tau$ .
    - 5.3.2. Par analyse dimensionnelle, vérifier que  $\tau$  est homogène à un temps.
    - 5.3.3. Par une méthode de votre choix, déterminer la valeur de  $\tau$  en utilisant **l'annexe 2, à rendre avec la copie.**
    - 5.3.4. Calculer l'inductance  $L$  de la bobine.
6. Justifier la limite  $I$  commune aux deux saisies.



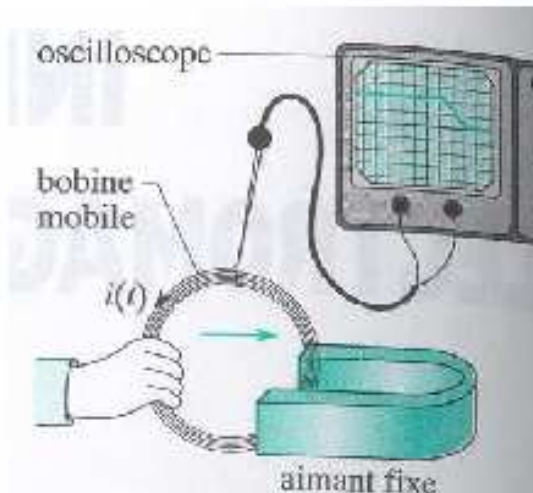
## Liens expérimentaux

### 1°) Mise en évidence

#### 1-1°) Expériences qualitatives

Décrire quelques expériences simples mettant en évidence le phénomène d'induction.  
Même question avec l'auto-induction.

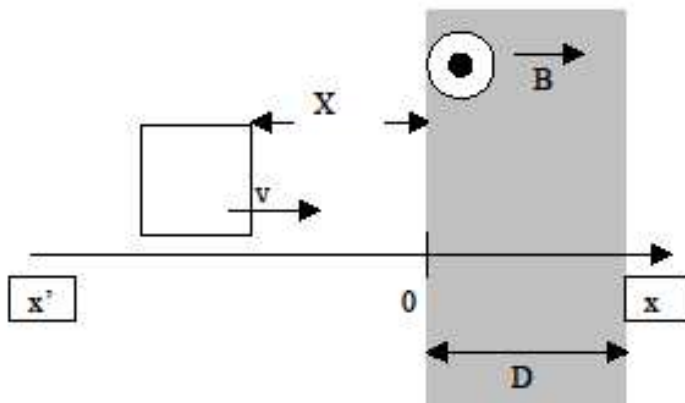
#### 1-2°) Une Technique simple



Le champ magnétique créé par les deux faces internes (nord et sud) de l'aimant en U peut être considéré comme constant dans cette expérience de mise en évidence.

On peut vérifier plusieurs choses : La différence de potentiel aux bornes des  $N$  spires dépend de la vitesse, du sens de déplacement, de la valeur du champ  $B$  à l'intérieur, etc....

#### 1-3°) Approche théorique du phénomène



Un cadre carré, de côté  $a$ , entre dans un champ magnétique uniforme avec la vitesse  $v$  supposée constante.

1°) Choisir le repère de la figure, orienter le cadre en fixant les points A, B, C, D.

2°) Donner l'expression du champ électromoteur  $E_m$  sur chaque côté du cadre en fonction de  $B$ ,  $a$ , et  $v$ , pour les 4 cas suivants :

- cadre hors du champ
- cadre entrant dans le champ
- cadre entier dans le champ
- cadre sortant dans le champ

3°) En appelant  $r$  la résistance totale, calculer  $i$  dans chaque cas.

## 2°) Les mesures de champs magnétiques et des courants créateurs

### 2-1°) L'effet Hall

A revoir absolument ( diverses épreuves du Capes antérieures ). Je vous donne ici une petite compilation des questions posées sur le sujet.

L'effet Hall apparaît dans les métaux et les semi-conducteurs. On considère un matériau conducteur dans lequel il n'existe qu'un seul type de porteurs de charge. Soit  $n$  le nombre volumique des porteurs et  $q$  leur charge. Pour simplifier les raisonnements et les schémas, on supposera que la charge des porteurs est positive.

**2-1-1)** Dans un repère orthonormé  $Oxyz$ , on considère une petite plaquette, réalisée dans ce matériau, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, de très grande longueur  $a$  selon  $Ox$ , de largeur  $b$  selon  $Oy$  et d'épaisseur  $c$ , très faible devant  $b$ , selon  $Oz$ . Cette plaquette est traversée par un courant d'intensité  $I$  constante dont on supposera la densité de courant uniforme sur la section  $S=bc$  de la plaquette et dirigée selon la direction  $Ox$ .

En utilisant la relation de définition du vecteur de densité de courant, exprimer, lorsque la plaquette n'est soumise à aucun champ magnétique et en projetant dans le repère d'étude, la vitesse moyenne d'ensemble  $v$  des porteurs de charges dans cette plaquette en fonction de  $n$ ,  $q$  et  $J$ , puis en fonction de  $I$ ,  $S$ ,  $n$  et  $q$ .

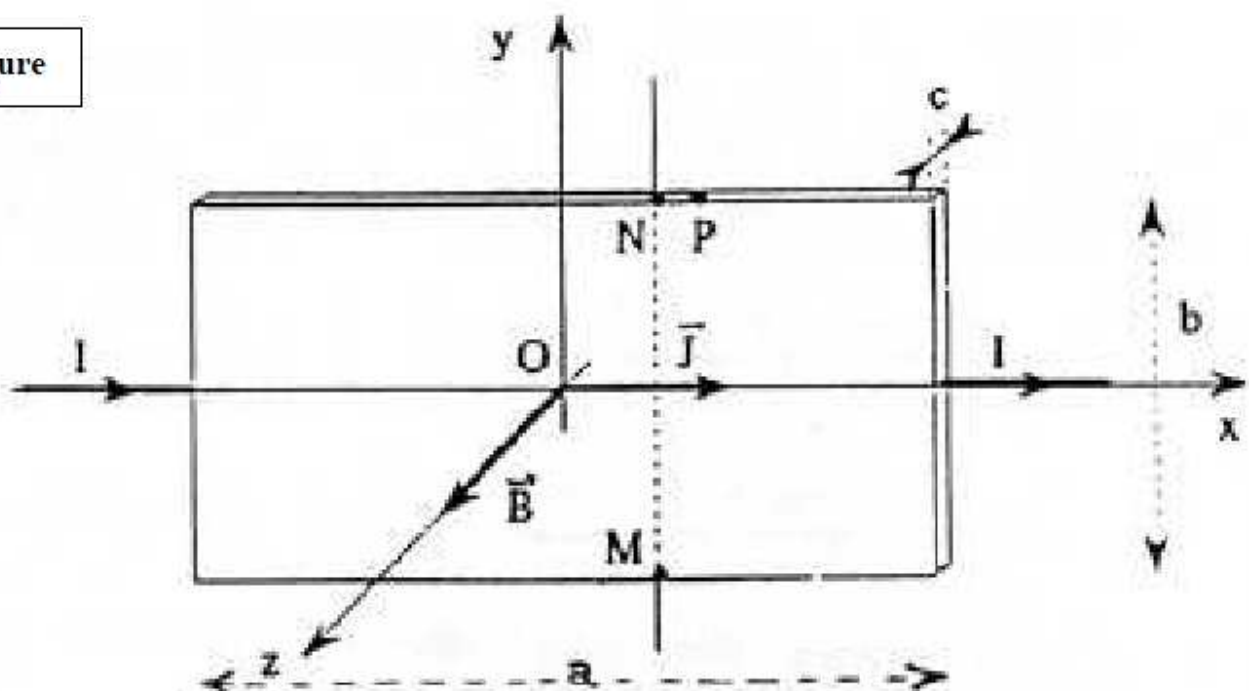
**2-1-2)** La plaquette est maintenant soumise à un champ magnétique  $B$  perpendiculaire à son plan, soit un champ orienté colinéairement à  $(z'z)$ .

Avant que le régime permanent ne soit atteint, les premiers porteurs de charge qui arrivent dans la plaquette sont soumis à une force magnétique  $f_{mag}$  que l'on déterminera.

Justifier le fait qu'il apparaît alors un excès de charges positives (ou un défaut de charges négatives) sur le plan d'abscisse  $y=-b/2$  et un défaut de charges positives (ou un excès de charges négatives) sur le plan d'abscisse  $y=+b/2$ .

Ces premières charges sont responsables de la création d'un champ électrique, appelé « **champ électrique de Hall** ».

Figure



Lorsque le régime permanent est atteint, les nouveaux porteurs de charge qui arrivent dans la plaquette sont soumis à une force magnétique et à la force électrique due à la contribution du champ électrique de Hall. Que peut-on dire alors de la résultante de ces deux forces ?

En déduire l'expression du champ électrique de Hall, en projection selon Oy, en fonction de B, I, S, n et q.

On mesure la différence de potentiel  $V_{\text{Hall}} = V_M - V_N$  entre les deux points M et N situés sur un même perpendiculaire à Ox. Des calculs précédents, déduire l'expression de cette différence de potentiel en fonction de B, I, n, q et c. Comment cette sonde peut-elle servir à la mesure d'un champ magnétique ?

**2-1-3)** La plaquette est maintenant soumise à un champ magnétique B de sens  $x'x$ . Que devient la différence de potentiel  $V_{\text{Hall}}$  dans ce cas ?

Même question lorsque la plaquette est soumise à un champ magnétique B de sens  $y'y$ . Conclure quant à l'utilisation d'une sonde à effet Hall pour la mesure d'un champ magnétique.

**2-1-4)** La plaquette est à nouveau soumise à un champ magnétique perpendiculaire à son plan, c'est à dire suivant  $z'z$ . On commet une erreur de positionnement du contact N et la d.d.p. V est mesurée entre les points M et P, tel que  $NP=d$ .

On suppose que le matériau possède une conductivité  $\gamma$  et obéit à la loi d'Ohm sous forme locale.

En déduire l'expression de la composante du champ électrique qui existe suivant la direction Ox en fonction de I, S et  $\gamma$ .

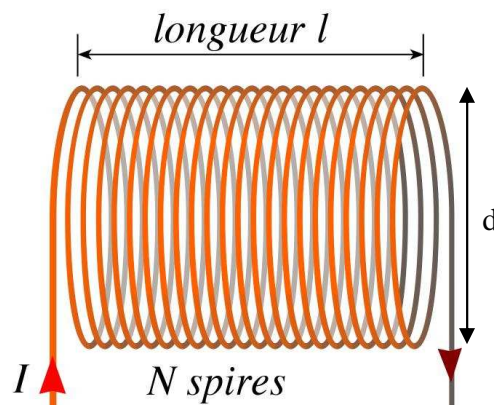
Exprimer la d.d.p. V mesurée entre M et P en fonction de  $V_{\text{Hall}}$ , I, S,  $\gamma$  et d.

Comment pourrait-on s'affranchir de l'erreur commise en confondant V et  $V_{\text{Hall}}$ ?

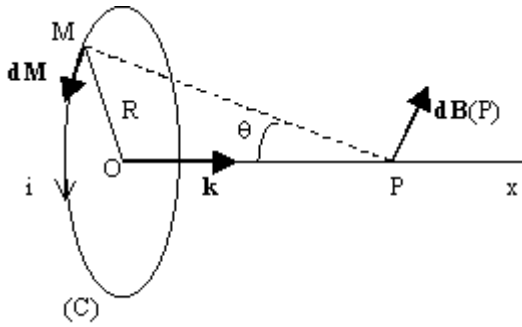
### 3°) Le solénoïde au montage de présentation

#### 3-1°) Calcul de l'inductance

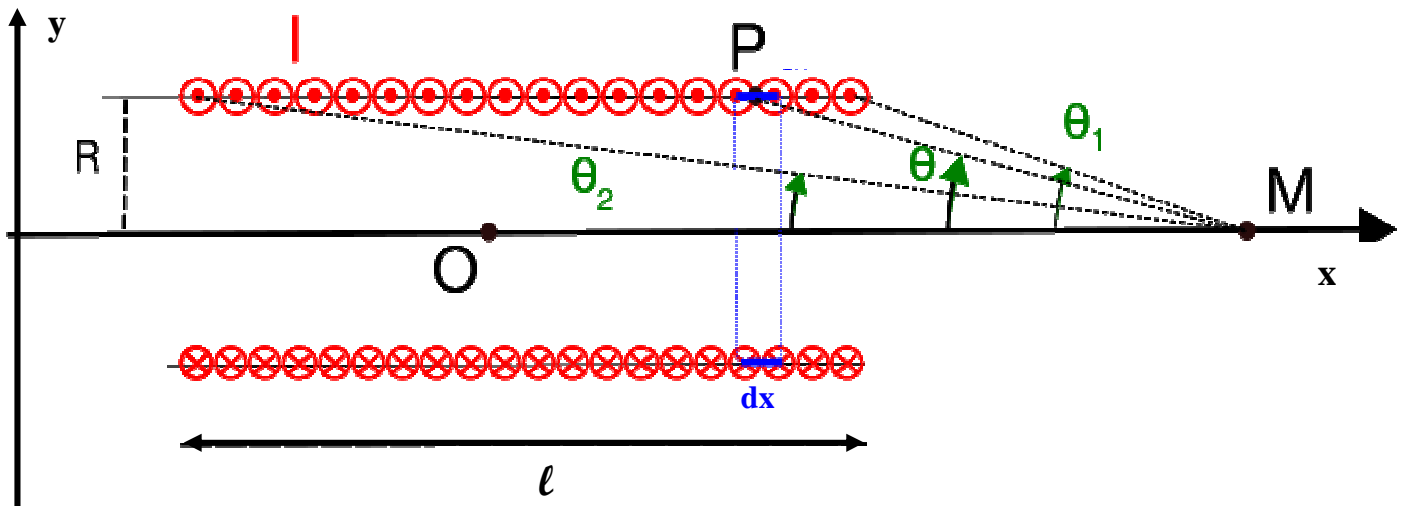
Un solénoïde (schéma ci-dessous) est constitué de N spires jointives, isolées et régulières de section S. Sa longueur l est très grande devant ses dimensions latérales et on ne tient pas compte des extrémités. Le but est de déterminer son inductance propre L puis d'appliquer les approximations d'usage afin d'avoir en tête les écarts à l'idéalité.



**3-1-1)** Une spire circulaire, de diamètre  $d=2R$ , parcourue par un courant  $i$ , crée un champ magnétique  $\vec{B}(P)$  en  $P$  situé sur l'axe à la distance  $a$ . Donnez l'expression vectorielle de  $\vec{B}(P)$  en fonction de  $R$  et de  $\theta$  ainsi que les paramètres de l'expérience et d'éventuelles constantes dont vous préciserez les valeurs et les unités.



**3-1-2)** Le solénoïde étudié est constitué d'une distribution  $N$  spires précédentes. En admettant que sur une longueur  $dx$  du solénoïde il ya  $dN=n dx$  spires (avec  $n$ , le nombre de spire par unité de longueur), en déduire l'expression du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point  $M$  situé sur l'axe, en fonction de  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .



En déduire l'expression du champ magnétique sur l'axe pour une bobine infini. Vous prouvez également que ce champ a un module constant à l'intérieur de la bobine de longueur infini et vous donnerez l'allure des lignes de champs dans le cas du solénoïde fini.

**3-1-3)** On considère maintenant que le point  $M$  se trouve sur l'axe, à l'intérieur du solénoïde fini, à l'abscisse  $x$ . Donnez l'expression du champ  $B$  en fonction de  $R$ ,  $x$  et  $l$ .  
A quelle condition sur la géométrie du solénoïde peut-on affirmer que le champ  $B$  a une composante négligeable suivant  $y$ ?

**3-1-4)** Donnez l'expression du flux élémentaire  $d\Phi$  du champ  $B$  à travers  $dN$  spires. Rappeler l'unité de  $\Phi$

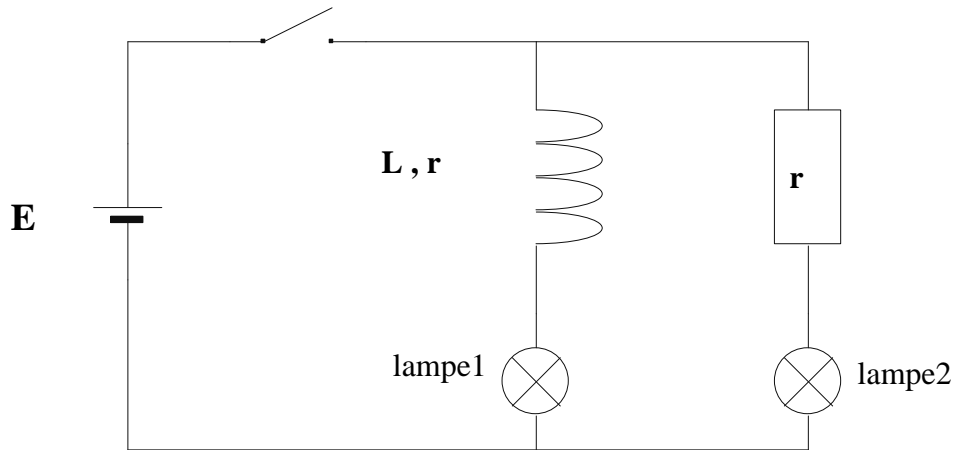
**3-1-5)** En intégrant sur la longueur du solénoïde, donnez l'expression de  $\Phi$  en fonction de  $\mu_0, S, n, R$  et  $l$ .  
En déduire la simplification dans le cas d'une bobine de très grande longueur.

**3-1-6)** Donnez l'expression de l'inductance  $L$ , avant et après simplification.

**3-1-7)** Applications numériques: les solénoïdes utilisés en montage ont pour ordres de grandeurs suivantes:  
 $R=1\text{cm}$        $l=10\text{cm}$  et  $n=1000$  spires/m  
Donnez l'erreur commise sur  $L$  en considérant cette bobine infinie.

### 3-2°) Retard à l'allumage d'une diode

#### 3-2-1)



Le circuit ci-dessus permet de comparer l'allumage de lampes par deux circuits différents dont l'un est instantané et l'autre retardé par l'auto-induction de la bobine. Comment pouvez-vous expliquer à un élève de Terminale S que la bobine retarde l'allumage de la lampe? A quoi sert la résistance en série avec la lampe2 et pourquoi est-elle de la même valeur que la résistance de la bobine?

**3-2-2)** On ferme l'interrupteur: établir, après avoir donné l'équation différentielle de  $U_L$  (tension aux bornes de la bobine), l'équation horaire  $U_1=f(t)$  de la tension aux bornes de la lampe1.

**3-2-3)** On peut considéré que la lampe s'allume au-delà d'une tension de seuil égale à  $U_s$ .  
Donnez l'expression du retard à l'allumage noté  $t_r$  en fonction des paramètres du circuit.

**3-2-4)** Applications numériques adaptées: En choisissant des valeurs adaptées au matériel classique de laboratoire ainsi qu'une valeur de  $E$  qui ne risque pas d'endommager les lampes, donner la valeur de  $L$  qu'il faut choisir pour avoir un retard d'un ordre de grandeur de la seconde.

**3-2-5)** Le courant est désormais établi et constant. On ouvre l'interrupteur. Quelle variation subit la tension aux bornes de la bobine? Quel circuit peut-on présenter au jury afin de prouver cette variation?

**3-2-6)** On remplace maintenant le générateur de tension continue par un générateur de signaux sinusoïdaux de même valeur maximale  $E$  et de pulsation  $\omega$ . On prendra la notation complexe  $\underline{E}(t)=Ee^{j\omega t}$   
Donnez l'équation différentielle dont le courant  $i(t)$  dans la lampe1 est solution.

**3-2-7)** Précisez pourquoi  $i(t)$  est forcément sinusoïdale. En déduire l'expression de  $I_0$  et de  $\varphi$  dans la solution complexe :  $\underline{i}(t)=I_0e^{j(\omega t+\varphi)}$ , en fonction des paramètres du circuit. Vous donnerez pour finir l'expression de  $i(t)$  en fonction de  $\cos\varphi$ ,  $E$ ,  $r$  et  $(\omega t+\varphi)$ .

**3-2-8)** Peut-on envisager de ne jamais voir la lampe1 s'allumer? Pourquoi?

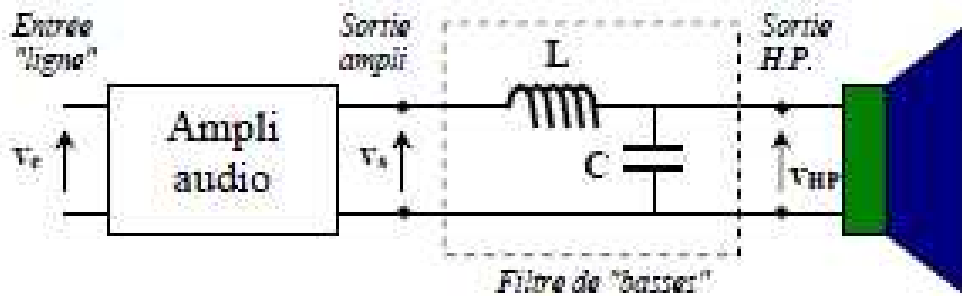
**3-2-9)** Cette expérience est-elle utilisable pour mesurer la valeur de  $L$  ? Comment l'exploiter alors?



# EXEMPLES D'UTILISATION DES BOBINES

## 1- Filtrage audio

Les sons de basses fréquences (graves) sont caractérisés par des variations lentes du signal alors que les sons de hautes fréquences (aigus) proviennent de variations rapides du signal. Avant de brancher un haut-parleur "basses fréquences", il faut atténuer les aigus en utilisant le montage ci-dessous :

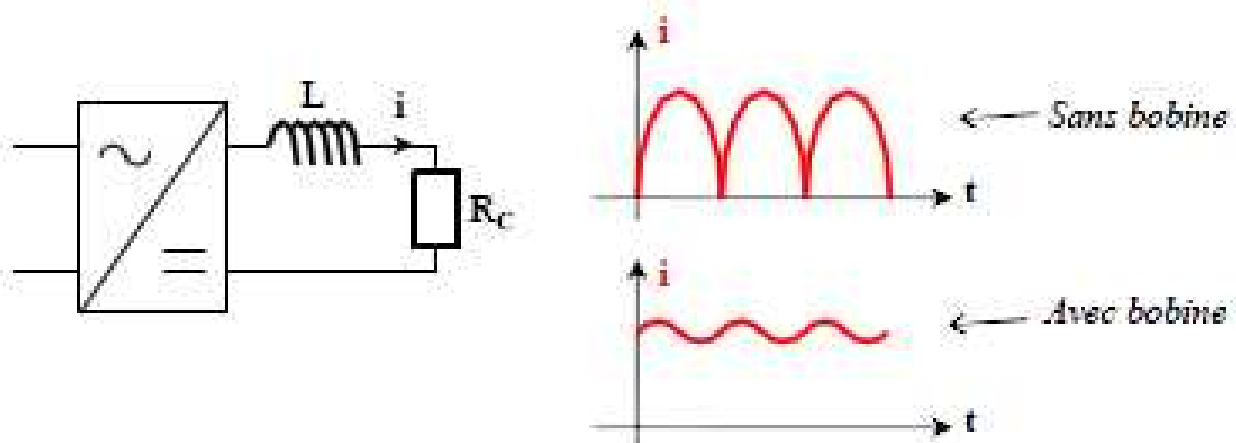


La bobine s'oppose aux variations rapides du courant et ne va laisser "passer" que les variations lentes ( basses fréquences ).

Le condensateur s'oppose aux variations rapides de tension et va jouer le même rôle que la bobine en étant branché en parallèle sur le haut-parleur.

## 2- Lissage de courant

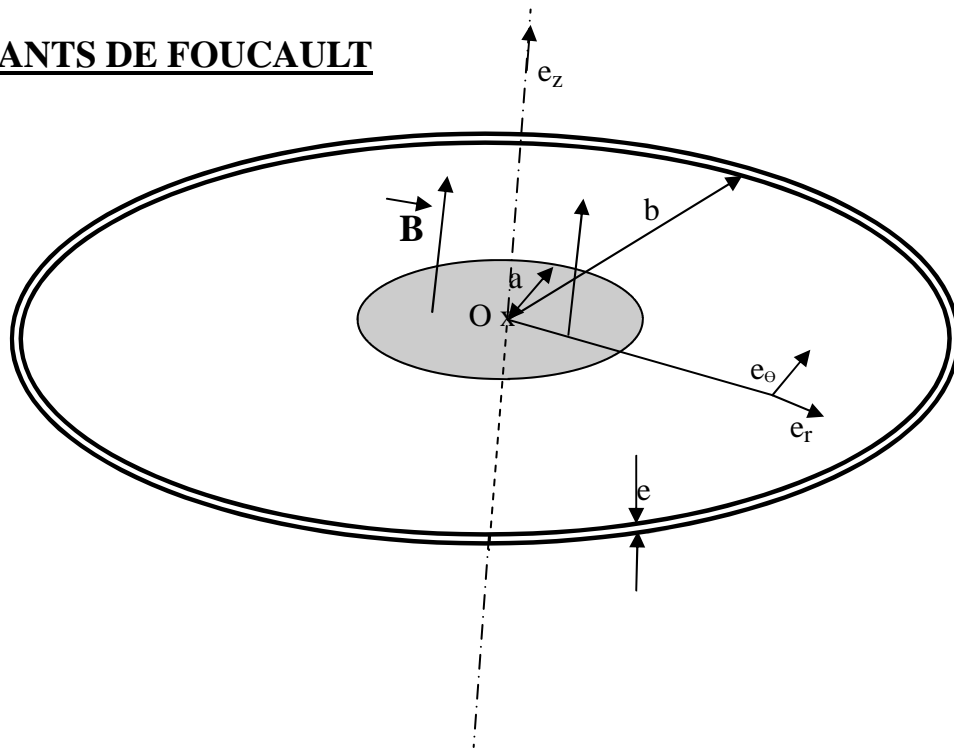
En sortie d'un montage redresseur, si l'on souhaite avoir un courant le plus constant possible, il faudra ajouter une bobine en série avec la charge.



Remarques : Les diodes de redressements jouent aussi le rôle de "roue libre" et permettent le passage du courant lorsque la bobine restitue l'énergie.

Plus la valeur de l'inductance est grande, plus le courant est "lissé".

## 4°) LES COURANTS DE FOUCAULT



Un disque mince d'épaisseur  $e$  et de rayon  $b$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B_m \cos \omega t \vec{e}_z$ . Ce champ est localisé dans la partie grise du schéma. On négligera l'effet des courants induits (on se limite à l'induction d'ordre 1).

On néglige les courants de déplacement devant les courants de conduction dans tout le problème.

### **4-1°) Raisonnons en champ constant.**

**4-1-1°)** On considère dans un premier temps  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  produit par un électro-aimant.

On coupe brutalement le courant. Énoncer la loi de Lenz (*et précisez l'année*) (ou loi de modération) et déduire la forme des lignes de courants qui apparaissent ainsi que le sens du courant le long de ces lignes.

**4-1-2°)** Effectuer le même raisonnement dans le cas d'un déplacement rapide de la zone de champ magnétique constant colinéairement à  $\vec{e}_r$ , par exemple de la valeur  $2a$  (pour simplifier). Quelles applications utilise ce procédé, soit par un déplacement du champ, soit par un déplacement de la plaque?

### **4-2°) Champ magnétique variable.**

**4-2-1°)** Avec des considérations de symétries, retrouver le résultat du 4-1-1 concernant la géométrie des lignes de courant de Foucault.

**4-2-2°)** À l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, du théorème de Stokes et en utilisant, en l'expliquant, que le champ  $\vec{B}$  est à flux conservatif, établir la relation:

$$\frac{2 \Pi r j}{\gamma} = \frac{-d\Phi}{dt}$$

avec :

- $r$ , distance au centre du disque
- $j$ , densité de courant
- $\gamma$ , conductivité électrique exprimé dans la loi d'ohm
- $\Phi$ , le flux du champ magnétique

**4-2-3°)** En déduire les expressions de  $j$  en fonction de la position sur le disque.

**4-2-4°)** Sur quel(s) paramètre(s) est-il le plus simple d'agir pour augmenter la valeur de la densité de courant?

### 4-3°) Puissance et effet de peau

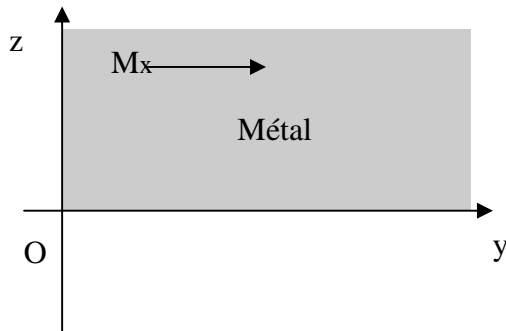
4-3-1°) L'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique aux charges ou aux courants est:  $\mathcal{P}_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E}$

En considérant cette expression comme la puissance dissipée par effet joule d'un petit élément de surface d'épaisseur  $e$ , donnez l'expression de la puissance totale dissipée par le disque.

4-3-2°) En déduire la puissance moyenne sur une très grande durée.

4-3-3°) Applications numériques:  $B_m=0,1T$  ,  $a=b=15\text{ cm}$  (casserole) ,  $e=2\text{mm}$  ,  $f=50\text{Hz}$  ,  $\gamma=6.10^7\text{S.m}^{-1}$

4-3-4°) Un champ magnétique dépendant du temps ne peut pas pénétrer profondément à l'intérieur d'un conducteur, nous allons le prouver simplement: Soit un métal qui occupe une zone de l'espace  $z > 0$  dans lequel règne un champ magnétique variable  $B(z,t)$  orienté parallèlement à la surface (comme le sont les courants de Foucault).



En M,  $\vec{B}=B(z,t)\vec{e}_y$

en  $z=0$ , on a  $\vec{B}=B_0 \cos\omega t \vec{e}_y$

Afin d'exprimer  $\vec{B}$  en fonction de  $\vec{E}$ , écrire l'équation de maxwell-ampère en négligeant le courant de déplacement devant le courant de conduction.

4-3-4-a) En déduire que  $\Delta B = \frac{\partial B}{\partial t} \mu_0 \gamma$

4-3-4-b) Donnez l'équation différentielle en exprimant le Laplacien. On admettra qu'une solution d'une telle équation est  $\vec{B}=B_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{e}_y$  avec  $\delta$ , épaisseur de peau, d'expression  $\sqrt{2/\mu_0 \gamma \omega}$

4-3-4-c) Justifier l'appellation « profondeur caractéristique » de  $\delta$  par analogie avec un autre phénomène physique simple.

4-3-5°) Influence des courants induits dans la plaque cylindrique du problème: les courants de Foucault induits par la variation du champ magnétique créent aussi un « contre-champ » magnétique orienté par la loi de Lenz. Donner l'expression de  $\delta B'$ , champ magnétique élémentaire créé en son centre par une spire de rayon  $r$ , de largeur  $dr$ , parcouru par un courant  $di$ .

4-3-6°) En remarquant que  $di=j.e.dr$  et par intégration sur tout le disque, en déduire l'expression de ce « contre-champ »  $B'$  en fonction de  $\mu_0, \gamma, \omega, e, a, b$ , puis en faisant apparaître  $\delta$ , épaisseur de peau du 4-3-4-b.

4-3-7°) Discuter de la possibilité de négliger ce « contre-champ » en fonction de l'épaisseur du disque.

Autres données numériques:  $\mu_0= 4\pi.10^{-7}\text{ N.A}^{-2}$

## 5°) Machines synchrones et asynchrones

### 5-1°) Champs tournants

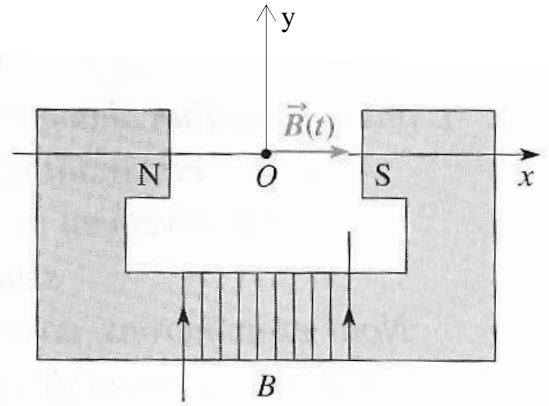
5-1-1°) La bobine est alimenté par un courant sinusoïdal.

Le champ B, supposé alternatif sinusoïdal peut s'écrire:

$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega_0 t) \vec{e}_x$$

Montrez que  $\vec{B}$  peut s'écrire :

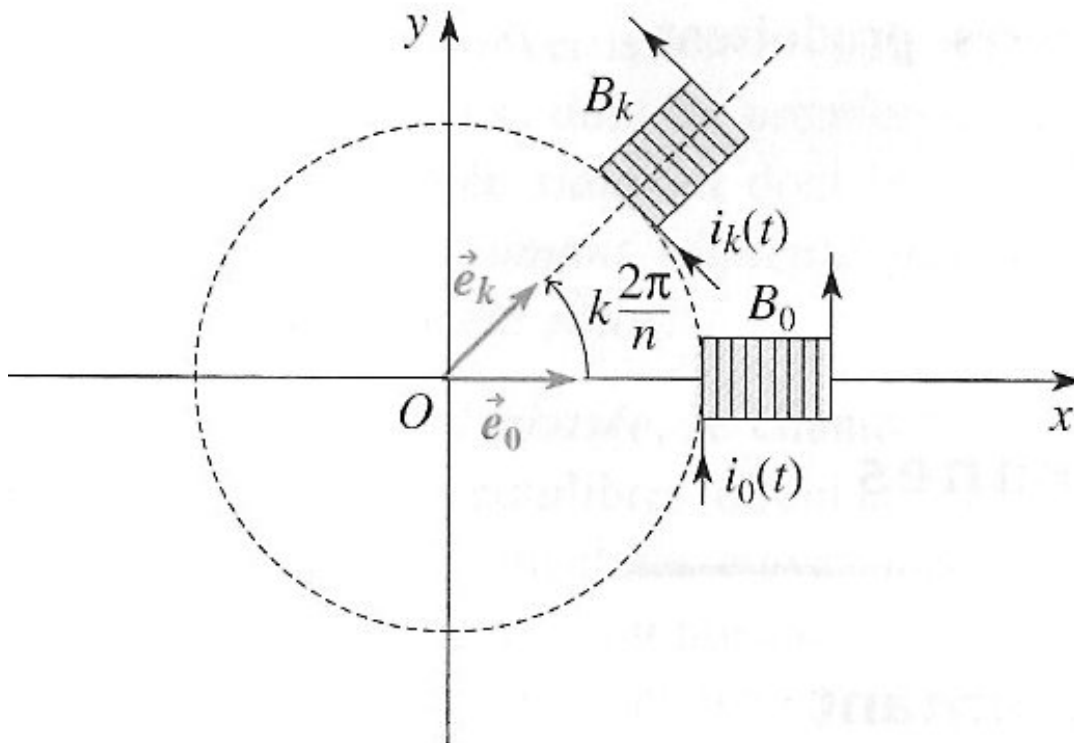
$$\vec{B} = B_0/2([\cos(\omega_0 t)\vec{e}_x + \sin(\omega_0 t)\vec{e}_y] + [\cos(-\omega_0 t)\vec{e}_x + \sin(-\omega_0 t)\vec{e}_y])$$



5-1-2°) En déduire que  $\vec{B}$  est la somme de deux champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  dont on précisera les caractéristiques sur un schéma. Comment prouver expérimentalement l'existence de ces deux champs?

5-1-3°) Un champ tournant d'intensité plus forte peut être réalisé par l'association de n bobines disposées en marge d'un cercle (schéma ci-dessous), dont l'écart angulaire entre axe est régulier et vaut  $2\pi k/n$ .

Le but du problème est de démontrer que le champ résultant est bien un champ tournant.



Chaque bobine k crée un champ magnétique  $\vec{B}_k$  variable en O car elle est alimenté par un courant alternatif sinusoïdal d'intensité  $i_k(t) = i_m \cos(\omega_0 t - 2\pi k/n)$ . Chaque courant est donc déphasé l'un par rapport à l'autre d'une valeur dépendant de la position de la bobine dans laquelle il circule.

5-3-1-a) Donnez l'expression simple du champ  $\vec{B}_k$  créé par la bobine k en O en fonction d'une valeur  $B_m$ , valeur maximale de la norme du champ  $\vec{B}_k$  si la bobine k est seule.

5-3-1-b) Donnez l'expression de la composante  $B_{kx}$  du champ  $\vec{B}_k$  suivant l'axe [Ox].

5-3-1-c) Par la somme des n champs  $B_{kx}$ , démontrez que  $\sum B_x = (n/2)B_m \cos(\omega_0 t)$ .

En déduire le théorème de Ferraris à savoir que le champ créé est bien tournant de pulsation  $\omega_0$ .

## 5-2°) Moteur synchrone

Trois paires de bobines de Helmholtz ont leur axes concourant (au point  $O$ ), coplanaires (plan  $xOy$ ) et faisant un angle de  $120^\circ$  les uns avec les autres. En prenant un de ces axes comme axe  $Ox$  les vecteurs unitaires des axes des trois bobines sont :

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_x \\ \vec{e}_2 &= \cos(2\pi/3)\vec{e}_x + \sin(2\pi/3)\vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_3 &= \cos(4\pi/3)\vec{e}_x + \sin(4\pi/3)\vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

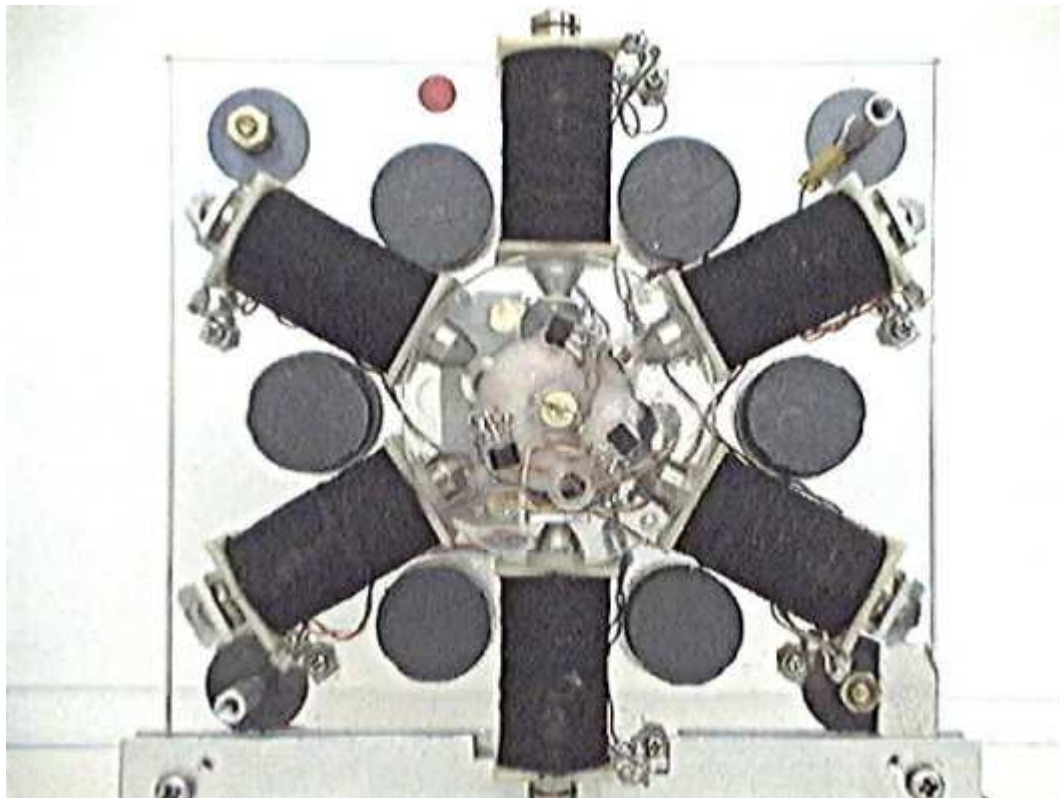
Les trois bobines sont parcourues respectivement par trois courants sinusoïdaux de même pulsation, de même amplitude mais déphasés de  $120^\circ$  les uns avec les autres, soit

$$I_1 = I_M \cos(\omega t) \quad I_2 = I_M \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad I_3 = I_M \cos(\omega t - 4\pi/3)$$

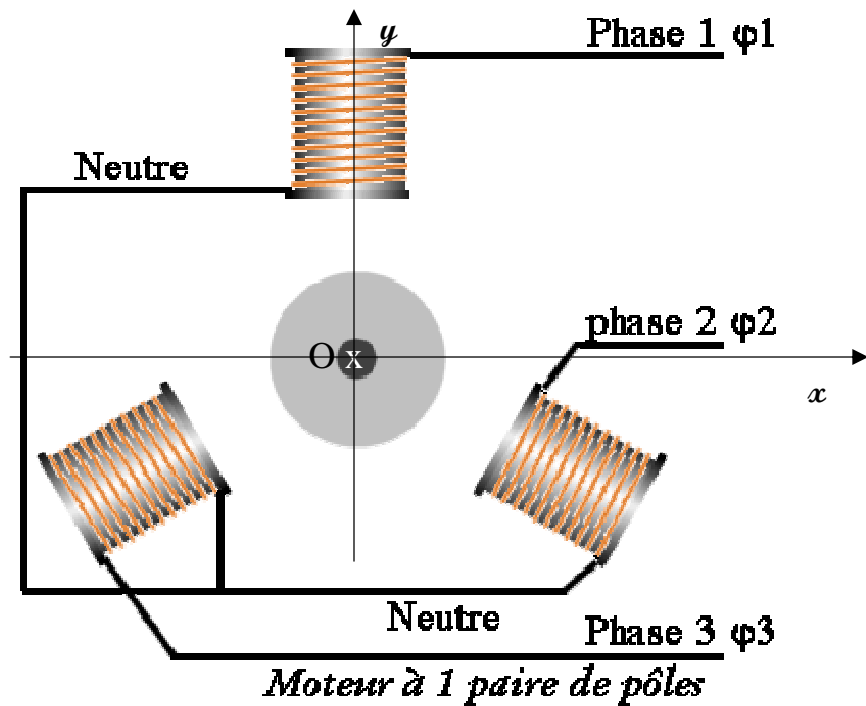
On rappelle que chacune des bobines crée un champ quasiment uniforme, parallèle à son axe et proportionnel au courant qui la parcourt, soit

$$\vec{B}_k = \alpha I_k \vec{e}_k \quad k \in \{1, 2, 3\}$$

où  $\alpha$  est une constante dont l'expression importe peu dans cet exercice.



*Par commodité de schématisation, le schéma suivant représente le même dispositif mais on a placé une seule des 2 bobines alimentées par le même courant. On peut raisonner sur ce schéma qui ne change que la valeur de  $\alpha$  précédente.*



5-2-1°) Exprimer le champ total en O et montrer qu'il s'agit d'un champ «tournant» de module constant, tournant à vitesse constante autour de l'axe Oz.

5-2-2°) Un aimant permanent, dont le seul degré de liberté est une rotation autour de Oz, a un moment dipolaire magnétique de module constant  $M$ . Il est placé dans ce champ tournant.

On rappelle que le moment des forces exercées par un champ magnétique  $\vec{B}$  sur un dipôle  $\vec{M}$  est, quelque soit le point de calcul (on parle alors d'un «couple»),  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ .

On envisage la possibilité d'un mouvement à vitesse angulaire constante et l'on note  $(\omega't - \Theta_0)$  l'angle que fait le dipôle avec Ox.

Quel est le couple instantané exercé par le champ sur le dipôle et quelle est sa moyenne temporelle ? Pourquoi parle-t-on de moteur synchrone ? Quel est son inconvénient majeur ?

5-2-3°) Comment le moteur s'adapte-t-il à l'effort à fournir (caractérisé par un couple moyen négatif) ? Montrer que le moteur cale si l'effort demandé est trop grand.

5-2-4°) Dans la réalité, le moteur s'arrête, repart en sens inverse puis s'arrête de nouveau et repart dans le premier sens (et ainsi de suite). Expliquer pourquoi et conclure sur un éventuel danger de ce type de moteur ainsi qu'une nécessité de le coupler avec un système d'entraînement extérieur au démarrage.

### 5-3°) Moteur asynchrone

L'aimant permanent est retiré et remplacé par une petite bobine constituée de  $N$  spires de surface  $S$  de vecteur normal  $\vec{n}$  dans un champ magnétique uniforme tournant  $B$  de norme  $B_0$  constante et dont la direction, de vecteur unitaire  $\vec{u}$ , reste dans le plan  $xOy$  et fait avec Ox l'angle  $\omega t$ . On envisage pour la bobine la possibilité d'une rotation uniforme de son vecteur normal  $\vec{n}$  dans le plan  $xOy$ , en faisant avec Ox l'angle  $\omega't$  avec  $\omega' \neq \omega$ .

5-3-1°) Donner l'expression littérale de la tension électromotrice induite dans la bobine.

5-3-2°) On note  $R$  la résistance de la bobine et, aux fréquences utilisées (50 Hz), l'effet d'auto-inductance peut être négligé. Donner l'expression de  $I$ , intensité du courant dans la bobine.



5-3-3°) La bobine se comporte comme un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = N S I \vec{n}$  et subit de la part du champ un couple  $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ . Calculer la valeur moyenne de ce couple.

5-3-4°) A quelle condition ce couple est-il moteur ? Pourquoi parle-t-on de moteur asynchrone ?

5-3-5°) Comment le moteur s'adapte-t-il à l'effort à fournir (caractérisé par un couple moyen négatif) ? Montrer que le moteur cale si l'effort demandé est trop grand.

5-3-6°) Les oscillations du moteur synchrone après avoir calé s'observent-elles également pour le moteur asynchrone ? Préciser également si un moteur d'entraînement au démarrage est nécessaire.

## 6°) Problème de synthèse du Capes 2007

### Etude de quelques éléments d'un train d'une ligne non électrifiée

Le moteur des premières locomotives diesels fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. C'est l'objet de la première partie de ce problème. Mais ces premières locomotives furent un échec : le nombre de vitesses de leur transmission mécanique était insuffisant.

La locomotive diesel - électrique se passe de boîte de vitesse mécanique : elle est munie d'un moteur diesel qui, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction : en somme, cette locomotive fabrique grâce au moteur thermique sa propre électricité. La seconde partie est consacrée à l'étude de l'alternateur triphasé synchrone puis à celle d'un moteur électrique asynchrone (qui équiperont la nouvelle génération de locomotives diesels électriques B-75000).

La troisième partie du problème est consacrée aux roues du train : on verra que les wagons penchent dans une courbe car il n'existe pas, comme sur les automobiles, de « différentiel », système qui permet aux roues de tourner à des vitesses angulaires différentes.

Enfin, quel voyageur n'a pas été confronté à l'obscurité dans son compartiment lors de l'entrée dans un tunnel ? Il n'est pas rare que l'éclairage se mette en marche... une fois le tunnel terminé ! On verra pourquoi l'allumage de l'éclairage par tube à décharge n'est pas instantané dans la quatrième partie.

Heureusement, les petites veilleuses des wagons procurent au lecteur un faisceau de lumière qui ne dérange pas son voisin endormi. C'est l'objet de la dernière partie.

*Les parties sont totalement indépendantes : elles peuvent être abordées sans que ce qui précède ait été traité.*

On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et on rappelle les valeurs de quelques constantes dans le système international d'unités :

- ✓ la permittivité du vide  $\epsilon_0 = 8,8541 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  ;
- ✓ la perméabilité du vide  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  ;
- ✓ la vitesse de la lumière dans le vide:  $c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ , telle que  $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  ;
- ✓ la constante des gaz parfaits:  $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ .

On donne les formules trigonométriques suivantes:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

ainsi que les développements limités:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x ;$$

$$\sin(x) \approx x ;$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

## I - Moteur diesel

### I-1) Propriétés d'un gaz parfait :

I.1.1) Rappeler l'équation d'état que suit une quantité de matière  $n$  d'un gaz parfait à la pression  $P$ , dans un volume  $V$ , à la température  $T$ .

I.1.2) On note  $C_p$  et  $C_v$  les capacités thermiques respectivement à pression et à volume constants, et on rappelle l'énoncé des deux premières lois de Joule pour un gaz parfait, concernant l'énergie interne  $U$  et l'enthalpie  $H$  :

$$dU = C_v \cdot dT$$

$$dH = C_p \cdot dT$$

Exprimer  $C_p$  et  $C_v$  en fonction de  $n$ , de  $R$  et de  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

### I-2) Transformations d'un gaz parfait:

On supposera que le gaz n'est soumis qu'aux forces de pression. On s'intéresse à une transformation de ce gaz parfait qui le fait passer de l'état initial de pression  $P_i$  et de volume  $V_i$  à l'état final de pression  $P_f$  et de volume  $V_f$ . On exprimera les réponses aux questions qui suivent, uniquement en fonction de  $P_i$ ,  $V_i$ ,  $P_f$ ,  $V_f$ , et de  $\gamma$ .

I.2.1) Exprimer le travail  $W_{isoV}$  échangé par ce gaz lors d'une transformation isochore réversible.

I.2.2) Exprimer le travail  $W_{isoP}$  échangé par ce gaz lors d'une transformation isobare réversible.

I.2.3) Exprimer le transfert thermique  $Q_{isoV}$  échangé par ce gaz lors d'une transformation isochore réversible.

I.2.4) Exprimer le transfert thermique  $Q_{isoP}$  échangé par ce gaz lors d'une transformation isobare réversible.

I.2.5) Exprimer le transfert thermique  $Q_{isoS}$  échangé par ce gaz lors d'une transformation adiabatique réversible.

I.2.6) Démontrer la loi de Laplace  $P_i \cdot V_i^\gamma = P_f \cdot V_f^\gamma$  que suit le gaz parfait lors d'une transformation adiabatique réversible.



### I-3) Etats thermodynamiques successifs lors du cycle diesel :

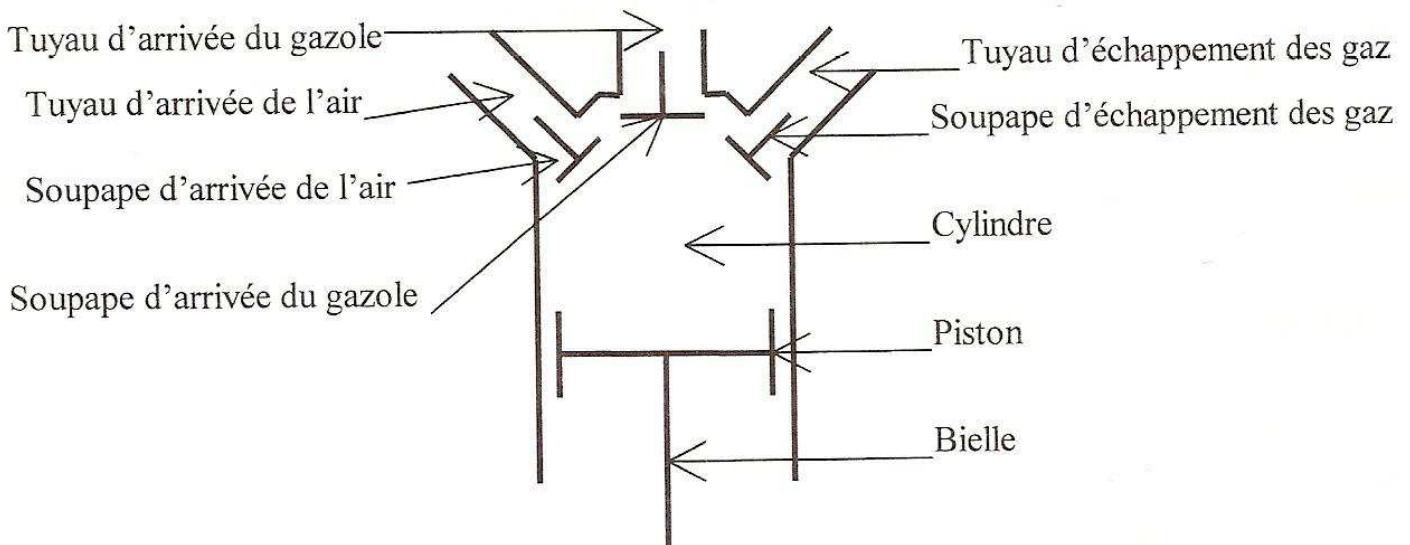


figure 1

On s'intéresse à un gaz parfait ( $\gamma = 1,40$ ) dans un cylindre de volume variable, entre  $V_{\min} = 150 \text{ mL}$  et  $V_{\max} = 400 \text{ mL}$ , fermé par un piston (cf. figure 1), qui subit un cycle réversible dont les caractéristiques sont :

- ✓ Admission: la soupape d'arrivée de l'air est ouverte (la pression est  $P_{\text{atm}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$ , la température  $T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$ ), les autres fermées. Le volume passe de  $V_{\min}$  à  $V_{\max}$  de façon isobare et isotherme.
- ✓  $A \rightarrow B$ : compression. Les soupapes sont fermées. Le volume passe de  $V_{\max}$  à  $V_{\min}$  de façon adiabatique et réversible.
- ✓  $B \rightarrow C$ : injection. Les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gazole. Le volume augmente jusqu'à  $V_C = 250 \text{ mL}$ , on modélise cette phase de combustion par une évolution isobare ( $P = P_{\text{max}}$ ) au cours de laquelle le gaz reçoit un transfert thermique lié à l'injection de gazole.
- ✓  $C \rightarrow D$ : détente. Les soupapes sont toutes fermées. Le volume augmente encore (jusqu'à  $V_{\max}$ ) mais la pression diminue (il s'agit d'une détente adiabatique et réversible).
- ✓  $D \rightarrow A$ : ouverture de la soupape d'échappement des gaz. La pression diminue brutalement jusqu'à  $P_{\text{atm}}$ , le volume restant constant.
- ✓ Ejection des gaz: la soupape d'échappement des gaz est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de  $V_{\max}$  à  $V_{\min}$  de façon isobare.

Déterminer numériquement (dans les unités du système international) les caractéristiques de chaque état thermodynamique intermédiaire (pression, température, volume) :

- I.3.1) en  $A$  : la pression  $P_A$ , le volume  $V_A$ , et la température  $T_A$  ;
- I.3.2) en  $B$  : la pression  $P_B$ , le volume  $V_B$ , et la température  $T_B$  ;
- I.3.3) en  $C$  : la pression  $P_C$ , le volume  $V_C$ , et la température  $T_C$  ;
- I.3.4) en  $D$  : la pression  $P_D$ , le volume  $V_D$ , et la température  $T_D$ .

#### **I.4) Transformations lors du cycle diesel :**

Déterminer numériquement lors des phases:

- I.4.1)  $A \rightarrow B$  : le travail  $W_{AB}$  et la chaleur  $Q_{AB}$  échangés par le gaz parfait ;
- I.4.2)  $B \rightarrow C$  : le travail  $W_{BC}$  et la chaleur  $Q_{BC}$  échangés par le gaz parfait ;
- I.4.3)  $C \rightarrow D$  : le travail  $W_{CD}$  et la chaleur  $Q_{CD}$  échangés par le gaz parfait ;
- I.4.4)  $D \rightarrow A$  : le travail  $W_{DA}$  et la chaleur  $Q_{DA}$  échangés par le gaz parfait.

#### **I.5) Diagramme de Clapeyron du cycle diesel :**

- I.5.1) Exprimer numériquement la somme des travaux échangés  $W_{tot}$  par le gaz parfait sur un cycle. Que penser de son signe?
- I.5.2) Tracer le cycle  $P = f(V)$  dans les coordonnées de Clapeyron.
- I.5.3) Dans quel sens est parcouru le cycle diesel dans le diagramme de Clapeyron ? Est-ce normal ?

#### **I.6) Rendement du moteur diesel :**

- I.6.1) Définir le rendement thermodynamique  $\eta$ .
- I.6.2) Calculer  $\eta$ .
- I.6.3) La vitesse maximale de rotation est  $N = 1,50 \times 10^3$  tr/min .  
Calculer la puissance maximale  $P_{moteur}$  de ce moteur diesel.



## II - Alternateur triphasé et moteur asynchrone

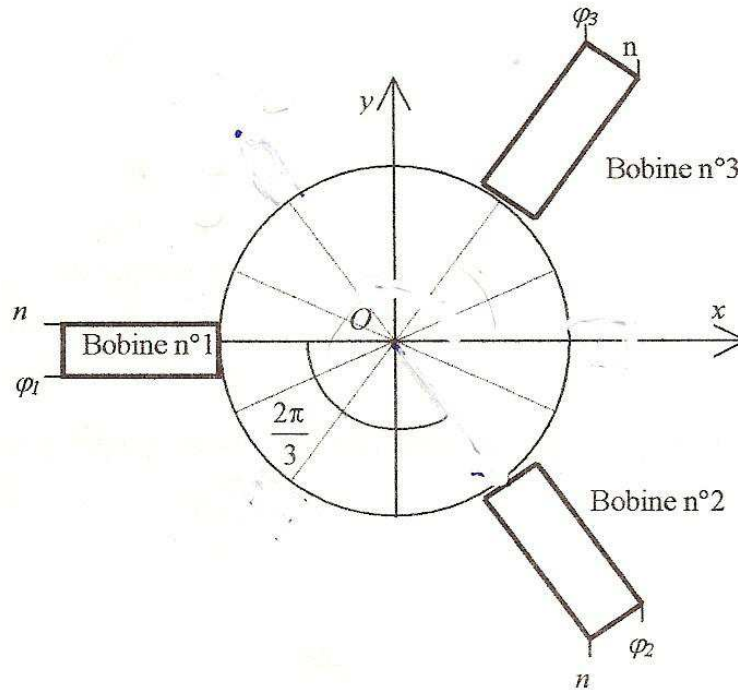


figure 2

### II-1) Etude de l'alternateur triphasé :

$(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est un repère orthonormé direct. On considère le dispositif représenté figure 2. Le stator est constitué de trois enroulements cylindriques identiques d'aire  $S$ . On repère par le vecteur surface  $\vec{S}_1 = S \vec{u}_x$  la surface de la première bobine. Les angles entre les vecteurs repérant les bobines sont :  $(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = (\vec{S}_2, \vec{S}_3) = \frac{2\pi}{3}$ . Chacun des vecteurs  $\vec{S}_k$  (pour  $k \in [1;3]$ ) est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant  $I_k$  qui circule dans la bobine n° $k$ .

II.1.1) Exprimer  $\vec{S}_2$  et  $\vec{S}_3$  dans le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ . On n'essaiera pas d'exprimer numériquement les fonctions trigonométriques.

II.1.2) Un rotor, sur lequel se trouve un aimant permanent, tourne autour de l'axe  $(Oz)$  avec la vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}_z$ . On admettra qu'il crée un champ magnétique appliqué  $\vec{B}$ , homogène de valeur  $B$ , tournant donc avec la même vitesse angulaire  $\vec{\Omega}$ . Le rotor est initialement orienté suivant  $(Ox)$ :  $\vec{B}(t=0) = B \vec{u}_x$ .

Donner l'expression des composantes  $B_x(t)$  et  $B_y(t)$  du champ magnétique appliqué au cours du temps.

II.1.3) Chaque bobine est constituée de  $N$  spires et a une section  $S$ . La résistance interne de chaque bobine sera supposée nulle. On négligera le champ magnétique induit par les courants dans les bobines devant celui créé par le rotor. On note  $U_k$  la tension aux bornes de la bobine n° $k$ , en convention récepteur. On réalise un couplage en « étoile », c'est à dire qu'un des pôles (noté  $n$ , de potentiel conventionnellement nul) est commun aux trois bobines. L'autre pôle de la bobine n° $k$  est au potentiel  $V_k(t) = U_k(t)$ .

II.1.3.a) La tension aux bornes de la bobine n° $k$  est  $U_k(t) = R_k \cdot I_k - e_k$ . Exprimer  $e_k$ , en fonction de  $\Phi_k$  le flux magnétique que reçoit la bobine.

II.1.3.b) Déterminer  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$ , les flux magnétiques que reçoit chaque bobine n°k, avec  $k \in [1;3]$ .

II.1.3.c) Montrer que l'on peut mettre les trois tensions  $U_k(t)$  sous la forme :

$$U_k(t) = -U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_k).$$

On exprimera  $U_{max}$  en fonction de  $N$ ,  $S$ ,  $B$  et  $\omega$ , ainsi que les trois phases  $\varphi_k$ .

II.1.3.d) Tracer sur un même graphique  $V_1(t)$ ,  $V_2(t)$  et  $V_3(t)$ .

II.1.3.e) La tension efficace entre un pôle au potentiel  $V_k(t)$  quelconque et le neutre  $n$  est  $U_{mono} = 220$  V. En déduire la valeur numérique de  $U_{max}$ .

II.1.3.f) Que vaut numériquement la tension efficace  $U_{tri}$  entre pôles différents au potentiel  $V_k(t)$  ?

## II.2) Etude magnétique du stator du moteur asynchrone :

Soit un solénoïde circulaire, de longueur supposée quasi-infinie suivant son axe  $(Ox)$ , parcouru par un courant  $I$ . Le nombre de spires le constituant par unité de longueur est  $n$ . Le vecteur surface  $\vec{S} = S \cdot \vec{u}_x$  est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant  $I$  qui circule dans le solénoïde.

II.2.1) Question préliminaire : exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par le solénoïde en un point quelconque de l'espace en fonction de la perméabilité du vide  $\mu_0$ , de  $n$ , de  $I$  et de  $\vec{u}_x$ .

II.2.2) Le stator du moteur asynchrone est constitué de trois enroulements cylindriques (qu'on assimilera à des solénoïdes infinis) identiques comme sur la figure 2. On repère les axes respectifs de chacune des bobines par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{u}_x \\ \vec{u}_2 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_y \\ \vec{u}_3 &= \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\vec{u}_y \end{aligned}$$

Chacun des vecteurs  $\vec{u}_k$  (pour  $k \in [1;3]$ ) est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant  $I_k$  qui circule dans la bobine n°k. On alimente ces trois bobines grâce à du courant triphasé créé par un alternateur triphasé. Aussi, chacune des intensités  $I_k(t)$  est de la forme :

$$I_k(t) = -I_0 \cdot \sin(\omega_{tri} \cdot t + \psi_k).$$

avec  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = \frac{-2\pi}{3}$  et  $\psi_3 = \frac{+2\pi}{3}$ .



II.2.2.a) Montrer que les composantes du champ magnétique peuvent s'exprimer sous la forme :

$$B_x(t) = -B_0 \cdot \sin(\omega_{ri} \cdot t)$$

$$B_y(t) = B_0 \cdot \cos(\omega_{ri} \cdot t)$$

On exprimera  $B_0$  en fonction de  $\mu_0$ , de  $n$ , de  $I_0$ .

II.2.2.b) Montrer que le stator du moteur asynchrone crée en  $O$  un champ magnétique, de valeur constante  $B_0$ , tournant autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}_{\vec{B}} = \omega_{\vec{B}} \cdot \vec{u}_z$ . Identifier  $\omega_{\vec{B}}$ .

### II.3) Etude électrique du rotor du moteur asynchrone :

Le rotor du moteur asynchrone est une bobine plate, fermée sur elle-même, de surface totale  $\vec{S} = S \cdot \vec{u}_r$ , de résistance  $R$  et d'inductance  $L$  qui peut tourner autour d'un axe  $(Oz)$  passant par son centre et perpendiculaire à  $\vec{S}$ . La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse de rotation  $\vec{\Omega}_{\vec{S}} = \omega_{\vec{S}} \cdot \vec{u}_z$ . Le rotor du moteur asynchrone ressent le champ magnétique créé par le stator, de valeur constante  $B_0$ , tournant autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire constante  $\vec{\Omega}_{\vec{B}} = \omega_{\vec{B}} \cdot \vec{u}_z$ . Le retard de phase initial de la bobine sur le champ tournant est  $\varphi$ .

II.3.1) Déterminer l'équation différentielle qui régit le courant  $i(t)$  dans la bobine du rotor, en fonction de  $R$ , de  $L$  et de  $\phi_{ext}$ , le flux du champ magnétique extérieur à travers la bobine du rotor.

II.3.2) Représenter, dans le plan  $(O,x,y)$ , le champ tournant  $\vec{B}$  et le vecteur surface  $\vec{S}$  en faisant figurer les angles à l'instant  $t$ .

II.3.3) Exprimer  $\phi_{ext}(t)$  en fonction de  $t$ ,  $B_0$ ,  $S$ ,  $\omega_{\vec{B}}$ ,  $\omega_{\vec{S}}$  et  $\varphi$ .

II.3.4) On veut exprimer l'intensité sous la forme  $i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi - \psi)$ . Donner l'expression de  $\omega$ .

II.3.5) Exprimer  $I_{max}$  en fonction de  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $B_0$  et  $S$ .

II.3.6) Faire de même pour  $\sin(\psi)$ .

### II.4) Etude mécanique du rotor du moteur asynchrone :

II.4.1) Donner l'expression du moment magnétique  $\vec{m}$  de la bobine.

II.4.2) Donner l'expression de la projection  $\Gamma_z$  suivant  $\vec{u}_z$  du couple instantané des actions électromagnétiques exercées sur la bobine, en fonction de  $t$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $B_0$  et  $S$ .

II.4.3) Exprimer le couple moyen  $C = \langle \Gamma_z \rangle$  en fonction de  $\omega$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $B_0$  et  $S$ .

II.4.4) Donner l'expression de la valeur  $C_0$  du couple moyen pour  $\omega_{\vec{S}} = 0$ . Le moteur peut-il démarrer seul?

II.4.5) Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou, au contraire, résistant ?

II.4.6) Exprimer la valeur maximale  $C_{max}$  du couple moyen dans le cas moteur et la vitesse angulaire du rotor  $\omega_{\vec{S}} = \omega_{max}$  pour laquelle cette valeur est atteinte.

II.4.7) Donner l'allure de la courbe représentant  $C(\omega_{\vec{S}})$ .